Matemáticas y futuro

Lección pronunciada por D. Daniel Hernández Ruipérez,
catedrático de Geometría y Topología
del Departamento de Matemáticas e IUFFYM
de la Universidad de Salamanca, con motivo
de la festividad de Santo Tomás de Aquino,
el día 26 de enero de 2024

Daniel Hernández Ruipérez

Matemáticas y futuro

Universidad de Salamanca

2024

Impreso en España - Printed in Spain
Gráficas Lope. Salamanca
www.graficaslope.com

| Índice |

Sr. Rector Magnífico, autoridades académicas, distinguidas autoridades civiles, militares y policiales, queridas compañeras y queridos compañeros de la comunidad universitaria, señoras y señores:

QUIERO COMENZAR esta charla agradeciendo al Rector y al Consejo de Gobierno que me haya dado la oportunidad de dirigirme a vosotros con motivo de la festividad de Santo Tomás de Aquino, y añadir, como propósito y promesa, que creo que lo más sensato es seguir a Polonio, cuando, en el acto segundo de Hamlet[1], decía:

[1] Hamlet, Acto Segundo, Escena VI, «*Therefore, since brevity is the soul of wit, And tediousness the limbs and outward flourishes, I will be brief.*

«Así pues, como la brevedad es el alma del talento, y nada hay más enfadoso que rodeos y perífrasis

... Seré breve»

Soy consciente, eso sí, por mi experiencia universitaria de años, de que cuanto más proclaman brevedad los oradores, más largo y enojoso es su discurso. Así que procuraré simplemente dejar fluir mis ideas esperando no extenderme en demasía.

Matemáticas hoy

Importancia y utilidad

Trataré de hablar sobre las matemáticas de hoy, reduciendo al máximo sus aspectos técnicos. Me parece un tema interesante, por cuanto la percepción de la influencia de las matemáticas ha cambiado bastante en nuestra sociedad en los últimos años. Por fortuna, y a partir sobre todo del extraordinario desarrollo de la Inteligencia Artificial y de la modelización de numerosos problemas, empieza a percibirse un reconocimiento popular a la importancia y utilidad de las matemáticas. Titulares de prensa como «Las matemáticas ayudan a entender cómo funciona el sistema inmune»[2], «El algoritmo que predice la demanda de electricidad»[3] o «Las matemáticas ayudarán a

[2] ABC, 27/11/2014.
[3] ABC, 21/08/2022.

producir cría de mejillón en cuerdas colectoras»[4], serían impensables hace pocos años y han contribuido a que, poco a poco, los matemáticos empiecen a gozar de un prestigio social que antes solo se daba a los ingenieros.

Si hace no demasiados años la principal actividad en España de los matemáticos era la docencia, y dentro de la universidad también la investigación, ahora los matemáticos son requeridos por empresas tecnológicas de todo tipo, y los graduados en matemáticas encuentran trabajos especializados y bien remunerados; no hay paro entre ellos. Por eso, y por el creciente prestigio de las matemáticas, las plazas para estudiarlas en las universidades se cubren completamente, con exigencia de altas calificaciones en el bachillerato y en las pruebas de acceso. De hecho, Matemáticas es una de las carreras con nota de corte más alta y con empleo garantizado.

4 La Voz de Galicia, 14/10/2023.

Percepción Social de la Ciencia

Ciencia y científicos para la sociedad

Con todo, sigue siendo común en muchas capas de nuestra sociedad la incomprensión hacia las matemáticas. Un sentimiento que se aplica también a otras ciencias. Por eso, al considerar la cuestión de cómo se perciben las matemáticas es preferible abordar con mayor generalidad la cuestión de la percepción social de la ciencia. Todo el mundo proclama su admiración por la ciencia, pero como algo ajeno, y es bastante habitual que se perciba al científico como un ser cuando menos peculiar, centrado en sus pequeñas manías, un cerebrito friki, sin interés por lo que se llama comúnmente cultura. No solo eso, es que muchas personas presumen de no saber nada de ciencias; quienes se mueven en ámbitos científicos están muy acostumbrados a que en un restaurante les digan: «haz tú la cuenta que eres de ciencias» o «yo, es que soy de letras» frente a la mención del menor cálculo elemental. Y ello con una evidente muestra de satisfacción por no interesarse en tan bajos menesteres. No es fácil imaginarse que en parecida situación un científico dijera: «lee tú la carta, que eres de letras».

Cultura y Sociedad

Hay que decir que, más allá de la caricatura, en nuestro país, e imagino que también en otros, lo que se entiende por cultura deja siempre de lado la ciencia. Aquí se entienden como cultura la literatura, la poesía, las artes plásticas, escénicas o cinematográficas, la música, la gastronomía, los usos y costumbres populares, el turismo; se habla de «la cultura del vino», o «del esfuerzo», se habla incluso de «la cultura del tardeo». Casi nadie aquí cree que cultura tenga nada que ver con conocimiento científico. A pesar de que la Real Academia Española defina cultura como «Conjunto de modos de vida y costumbres, conocimientos y grado de desarrollo artístico, científico, industrial, en una época, grupo social, etc.», aquí no se piensa que conocer las leyes de Maxwell, la tabla periódica, la noción de derivada, o la velocidad de desplazamiento de las placas tectónicas, tenga nada que ver con la cultura. Basta dar una ojeada al contenido de las secciones de cultura de los periódicos de difusión nacional. Esta es la de EL PAIS, por poner un ejemplo:

Cierto es, por otra parte, que las personas que cultivan de un modo u otro las humanidades se quejan, con razón, de un cierto desprestigio social de ese tipo de estudios, de que hay una idea extendida de que quien tiene condiciones debe dedicarse a trabajos relacionados con la ciencia, y sobre todo con la tecnología. No es infrecuente que se acoja con sorpresa que una persona que ha obtenido la máxima calificación en las pruebas de acceso a la Universidad decida estudiar una titulación de humanidades, que incluso tal elección sea noticia en la prensa.

Esta sensación se acrecienta en el mundo académico, en el que se denuncia la disminución del peso de las humanidades en los programas de estudio, sobre todo de la educación secundaria y el bachillerato, con el consiguiente efecto negativo sobre la formación integral de las personas. En ambas visiones subyace, ciertamente, una minusvaloración de la cultura en su verdadero sentido amplio y comprehensivo, y pone de manifiesto un cierto divorcio entre ciencias y humanidades, o, mejor, una cierta incomprensión mutua entre científicos y humanistas.

Las dos culturas

Nada nuevo; ya a mediados del pasado siglo tuvo una gran relevancia el ensayo sobre el diálogo de «Las dos Culturas» que publicara el físico y escritor C. P. Snow en 1959[5].

Ciencias vs. Humanidades

---

[5] C. P. Snow, *The Two Cultures and the Scientific Revolution* (Cambridge Univ. Press, New York, 1959).

Las dos culturas eran, claro está, la científica y la humanística, y el ensayo fue, y sigue siendo, objeto de debate y de numerosos estudios y comentarios.

Su posición se resume en este párrafo tantas veces citado:

> «Muchas veces he asistido a reuniones de personas que, según los criterios de la cultura tradicional, son consideradas muy cultas y que han expresado con gran entusiasmo su incredulidad ante la incultura de los científicos. Una o dos veces me he sentido provocado y he preguntado a la concurrencia cuántos de ellos podrían describir la Segunda Ley de la Termodinámica. La respuesta ha sido fría: también negativa. Sin embargo, yo preguntaba algo que es el equivalente científico de: ¿ha leído usted alguna obra de Shakespeare? Ahora creo que si hubiera hecho una pregunta aún más sencilla –como, por ejemplo, ¿qué entiende usted por masa, o aceleración?, que es el equivalente científico de decir, ¿sabe usted leer?– no más de una de cada diez de esas personas altamente educadas habría senti-

> do que estaba hablando el mismo idioma. Mientras se levanta el gran edificio de la física moderna, la mayoría de las personas más inteligentes del mundo occidental tienen tantos conocimientos sobre ella como los que habrían tenido sus antepasados neolíticos.»

Después se ha reconocido que la tecnología es en sí misma una tercera cultura, a la que, por cierto, los científicos puros han mirado con la misma condescendencia con la que los humanistas los consideraban a ellos. En palabras de Snow[6],

> «los científicos puros han sido, en general, poco inteligentes respecto a los ingenieros y la ciencia aplicada. No eran capaces de interesarse. No reconocían que muchos de los problemas eran intelectualmente tan exigentes como los problemas puros, y que muchas de las soluciones eran tan satisfactorias y bellas como las propuestas por los científicos».

---

6 C.P. Snow, Op. Cit.

Con todo, lo que Snow llamó originariamente «tercera cultura», era una cultura en la que nuevos científicos hablaban en un lenguaje común con intelectuales humanistas. Quizá eso era demasiado optimista.

A finales del siglo XX, el también físico y escritor Brockman reunió a un *grupo* de científicos brillantes en un libro que resucitó y modificó el término de Snow. La tercera cultura de Brockman[7] significaba una cultura científica de la calle, en la que los científicos en activo se comunicaban directamente con los profanos, y estos les devolvían el desafío. Es una cultura fundamentalmente tecnológica, que no se basa en explicar la naturaleza, sino en «*descubrir cosas nuevas que hay que explicar*», como dice el físico Freeman Dyson.

[7] J. Brockman, *The Third Culture: Beyond the Scientific Revolution*, Simon & Schuster: 1995 ISBN 0-684-82344-6.

Esta tercera cultura apela a distintos paradigmas que las anteriores. En palabras de Kevin Kelly[8]:

> «Mientras que la ciencia y el arte generan verdad y belleza, la tecnología genera oportunidades: nuevas cosas que explicar; nuevas formas de expresión; nuevos medios de comunicación; y, si somos sinceros, nuevas formas de destrucción. De hecho, la oportunidad en bruto puede ser lo único de valor duradero que nos proporcione la tecnología. No va a resolver nuestros males sociales ni a dar sentido a nuestras vidas. Para eso necesitamos las otras dos culturas. Lo que sí nos aporta –y con esto basta– son posibilidades.»

En tiempos recientes, podemos decir que la Inteligencia Artificial, con su capacidad para analizar conjuntos de datos masivos y dar sentido a patrones complejos, actúa como traductora entre diferentes

---

[8] K. Kelly, *The Third Culture*. Science 279,992-993(1998). DOI:10.1126/science.279.5353.992.

dominios del conocimiento tendiendo puentes entre aspectos técnicos y sus implicaciones sociales, éticas y humanas. En este sentido, puede decirse que la Inteligencia Artificial, en cuyo desarrollo las matemáticas desempeñan un papel crucial, produce elementos de diálogo entre las dos culturas de Snow, por lo que puede pensarse como una suerte de ejemplo de la tercera cultura. Al fomentar la colaboración multidisciplinar y provocar profundas consideraciones éticas y sociales, la propia Inteligencia Artificial no es aséptica, como los son las matemáticas, y necesita de un debate profundo sobre cómo debe guiarse su desarrollo para evitar efectos indeseables para la sociedad y para los seres humanos, para que sirva de brújula, guiándonos hacia decisiones responsables e informadas, y dé forma en última instancia a un futuro mejor.

En qué consisten las matemáticas

Matemáticas y patrones

Desde sus primeros días, y sin perder el carácter propedéutico general que les dieran los griegos, las matemáticas han sido el sustrato básico del desarrollo científico. Ya para Platón eran el instrumento principal de la conversación del alma, de ese proceso que permite al hombre contemplar la propia realidad y no sus sombras. Aparecen pues como una técnica del conocimiento, de la comprensión, y como tales conforman el lenguaje de la actividad científica, por cuanto el fin de la Ciencia es conocer y comprender, y su motor, la confianza en que pueden descubrirse las leyes que hacen el mundo comprensible. Pero, además de proporcionar un lenguaje que ayude al desarrollo de otras ciencias, las matemáticas reflexionan sobre sus propios resultados, intentan entenderlos mejor, desvelar las estructuras ocultas que esconden. La primera demostración de un resultado en matemáticas, de un teorema, asegura la veracidad de su enunciado, pero no siempre aclara cuál es la naturaleza de los hechos que lo hacen posible. El matemático trata entonces de poner el problema en su ámbito de naturalidad, de encontrar el punto de vista –la teoría– desde el cual el resultado se muestra como evidente. En este sentido, podemos decir que cada generación de matemáticos busca la estructura que, más que resolver un problema, lo disuelve. Esta búsqueda de la esencia de resultados de carácter elemental, que suele ir acompañada de un proceso de abstracción creciente, puede producir nuevas teorías más profundas que no solo los explican, sino que demuestran también cuestiones que parecían muy diferentes de ellos. Averiguar cuándo problemas muy distintos son, al final, encarnaciones de una misma teoría, además de un reto intelectualmente extraordinario, pone de manifiesto que un matemático en realidad busca patrones, modelos basados en ideas que se aplican a muy diferentes situaciones. Como decía el gran matemático inglés Hardy[9]:

> «Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de ellos, es porque están hechos con ideas.»

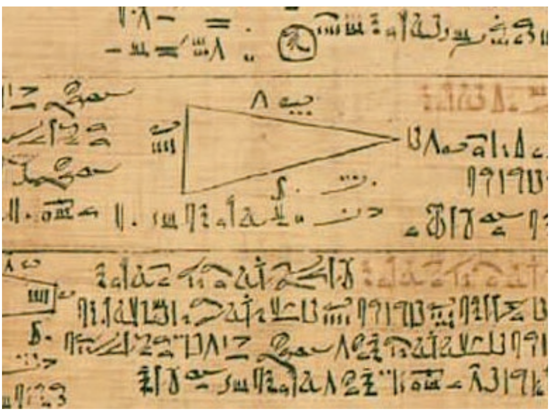
Hardy pone así de manifiesto que una de las características que distinguen las matemáticas de otras ciencias es la permanencia de sus resultados; cuando se ha demostrado un teorema, se desvela una verdad que se mantiene para siempre. Una vez que se demostró que en el ámbito de la geometría euclídea la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro

---

9 G.H. Hardy. *A Mathematician's Apology*. In: An Annotated Mathematician's Apology. With comment. by A. J. Cain. With annot. by A. J. Cain. Lisbon, 2019. URL: https://archive.org/details/hard y_annotated

es la misma para todas las circunferencias (y se denominó π al número que expresa esa relación), se descubrió una verdad inmutable, en cierto sentido eterna.

La geometría estaba muy desarrollada en el antiguo Egipto. Era un conocimiento sacralizado, reservado a los sacerdotes, un gran instrumento de poder pues permitía recuperar después de cada crecida del Nilo las lindes de las parcelas que habían desaparecido con las aguas.



Ahora bien, sin negar su tributo a otras culturas, las matemáticas, y con particular intensidad la geometría, revelan en su ser su verdadero origen griego. Las matemáticas se siguen escribiendo del mismo modo que ya lo hiciera Euclides, unos 170 años antes de Cristo, con la misma secuencia de definiciones, teoremas, con su enunciado y demostración, lemas necesarios para ella y corolarios o consecuencias que se deducen de ellos. Por eso los matemáticos griegos se siguen reconociendo en la actualidad; podemos decir que han alcanzado un cierto grado de inmortalidad.

El genio griego era deductivo y amante del saber, pero también de la belleza, y de esa actitud se deriva la aplicación del juicio estético a las teorías matemáticas. Se valoran así las investigaciones en ese campo no solo por sus aportaciones nuevas o por los problemas que resuelven, sino también por su belleza, o mejor, por su elegancia, entendida esta como una armonía de proporciones entre los fines y los medios, como una euritmia en el lenguaje que multiplica su significación, y que resulta decisiva a la hora de la inteligencia de las cuestiones que aborda y de la extensión de sus futuros dominios de aplicabilidad. Afirma también Hardy al respecto[10]:

> «Los patrones del matemático, como los del pintor o el poeta, deben ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben encajar de forma armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.»

Una pregunta que surge naturalmente es la de cuáles son las condiciones que debe cumplir un resultado relacionado con las matemáticas para ser reconocido como verdaderamente importante. No es una cuestión de respuesta sencilla, pero pueden encontrarse algunas pautas para ese reconocimiento. La principal característica es

10 G.H. Hardy. Op. Cit.

la *relevancia*. Pensemos en el ajedrez; un problema de ajedrez es, ciertamente, un problema matemático, pero de una matemática trivial (aunque pueda ser de difícil resolución), por cuanto es completamente inútil. No se trata tan solo de que no tenga consecuencias prácticas, tampoco las tienen muchos resultados de matemáticas, sino de que ningún problema de ajedrez ha afectado jamás al desarrollo de la matemática ni de otras ciencias, mientras que los trabajos de Euclides, Pitágoras, Newton, Gauss, Einstein, Grothendieck o Witten, por mencionar solo algunos grandes nombres, han cambiado decisivamente la ciencia de su tiempo. Podemos decir que una teoría matemática es relevante cuando contiene ideas significativas, en el sentido de que pueden conectarse con un amplio número de otras ideas de manera iluminante. Y enlazando con el juicio estético al que me he referido antes, parte de la belleza de una teoría matemática reside en su relevancia.

Si queremos estudiar un poco más en qué radica la significatividad de una idea matemática, encontramos dos características que comparten en cierta medida las ideas significativas. Sin querer ir más lejos, digamos solamente que deben ser por una parte *generales* y por otra *profundas*. Ser generales en el sentido de ser ideas que aparecen en muy diferentes construcciones matemáticas; no es fácil poner ejemplos que no requieran algo más que conocimientos de las matemáticas elementales, pero es posible, al menos, ofrecer muestras de resultados de matemáticas que no son generales en el sentido que acabo de decir: los sudokus, o la mayor parte de las curiosidades abundantes en la aritmética elemental, como la de que 8712 y 9801 son los únicos números enteros de menos de 5 cifras que son múltiplos de sus «reversos», 8712=4x2178, 9801=9x1089. Este tipo de resultados, adecuados para divertir al aficionado, son de tal especialización, tanto en su enunciado como en su demostración, que no pueden ser generalizados. Debo reconocer que ese tipo de cuestiones nunca me han interesado, en parte porque nada aportan a la comprensión de la aritmética, y en parte por una gran incapacidad por mi parte en resolverlas.

La otra característica de la significatividad de un problema matemático es su profundidad. La profundidad de un problema tiene que ver con la dificultad para establecerlo o demostrarlo, pero es algo diferente. Es cierto que los problemas profundos suelen ser difíciles, pero, como decía Hardy[11]:

> «Las ideas que subyacen al teorema de Pitágoras y sus generalizaciones son bastante profundas, pero ningún matemático de hoy las encontraría difíciles»

Sin embargo, hay problemas que parecen elementales, pero requieren de ideas mucho más complejas para comprenderlos y demostrarlos. Son, en este sentido,

---

[11] G.H. Hardy. Op. Cit.

resultados profundos, pues su completa inteligencia revela conexiones inesperadas con resultados aparentemente muy diferentes, demostrando así la necesidad de encontrar patrones superiores que iluminan todo un mundo del que nuestro resultado resulta ser una encarnación particular; volveremos sobre ello más adelante. En este sentido, el teorema de Pitágoras, que está íntimamente relacionado con cuestiones de conmensurabilidad y con la noción de número irracional[12], es mucho más profundo que el teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos[13], cuyo enunciado y demostración no salen del mundo de la aritmética elemental.

---

[12] Se llaman irracionales aquellos números que no pueden expresarse como cocientes de dos números enteros, por ejemplo, la raíz cuadrada de 2.

[13] Un número primo es un número entero (mayor que uno) que no tiene otros divisores enteros que 1 y él mismo.

Los matemáticos estamos acostumbrados a que se nos pregunte si se puede investigar algo en matemáticas, si no está todo hecho desde hace siglos. Bien al contrario, las matemáticas siempre han tenido un gran número de problemas abiertos, y esa es una muestra de su vitalidad. Además, cada año se producen espectaculares avances en resultados, métodos, conceptos y construcción de teorías, así como en sus aplicaciones, aunque es cierto que los evidentes progresos en la investigación matemática raramente pueden explicarse a un profano y, a veces, ni siquiera a un matemático de otra especialidad.

Quizá la más famosa lista de problemas fuera la que diera Hilbert en 1900 con motivo del primer Congreso Internacional de Matemáticas[14]. Casi todos ellos han sido

[14] D. Hilbert. *Mathematical Problems.* Bulletin of the American Mathematical Society. 8 (10), (1902) 437-479. doi:10.1090/S0002-9904-1902-00923-3. También D.

resueltos, con la notable excepción de la hipótesis de Riemann, y han dado lugar a un desarrollo extenso e intenso de las matemáticas, de forma que la propuesta de Hilbert no era solo una relación de cuestiones pendientes, sino una forma de poner de manifiesto la punta del iceberg de nuevas concepciones estructurales. El instituto Clay propuso, a su vez, en 2001, los denominados «siete problemas del milenio»[15], ofreciendo un premio económico por su resolución. Uno de esos problemas era la conjetura de Poincaré sobre las esferas, un problema muy famoso que no se resolvió hasta 2014.

Algunos de esos problemas tienen un enunciado elemental, pero su solución muchas veces requiere técnicas y conceptos extraordinariamente complejos y aparentemente muy alejados del problema original.

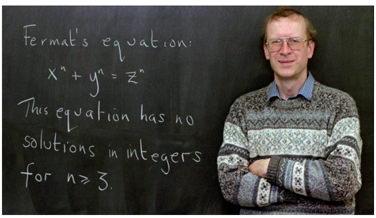
Hilbert. *Mathematical Problems.* Göttinger Nachrichten: 253-297 (1901).

15 Ver https://www.claymath.org/millennium-problems/ o J. Carlson, A. Jaffe and A. Wiles. *The Millennium Prize Problems* (American Mathematical Soc., 2006).

Por eso, problemas propuestos hace siglos, no llegan a resolverse hasta que se ha desarrollado la matemática necesaria algunos siglos después. Retomamos así la cuestión de la profundidad para los problemas matemáticos, de la que ya hemos hablado.

Técnicas complejas para enunciados elementales

Veamos cómo es este proceso en un caso concreto, el del último teorema de Fermat, cuya solución, alcanzada en 1995 Andrew Wiles[16], tuvo gran notoriedad.

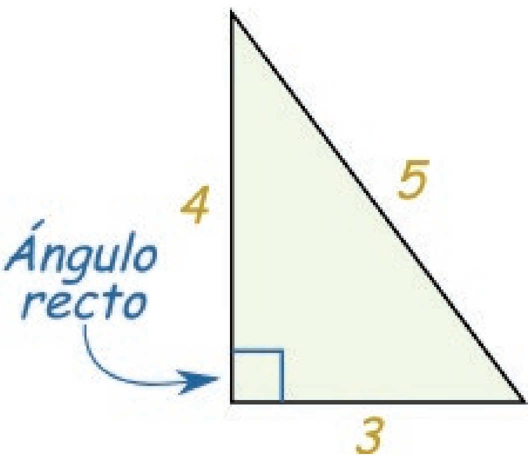


Andrew Wiles y Jean Pierre Fermat

[16] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Annals of Mathematics. 141 (3): 448 (1995). doi:10.2307/2118559

El enunciado, planteado por Fermat en el siglo XVIII, es muy sencillo: ¿Es posible encontrar dos números enteros no nulos de modo que la suma de sus potencias *n*-ésimas sea, a su vez, la potencia *n*-ésima de otro número entero no nulo? De otra manera, ¿existen números enteros no nulos *x*, *y*, *z* tales que se tenga que $x^n+y^n=z^n$?

La respuesta es claramente afirmativa si la potencia es 1, por cuanto la suma de dos números enteros es también un número entero. Así tenemos, por ejemplo, 3+1=4 o 4+6=10. También es afirmativa la respuesta cuando la potencia es 2, aunque ahora no es tan fácil encontrar soluciones, a pesar de que haya una infinidad de ellas. El problema está relacionado con un teorema que nos es familiar desde los tiempos escolares, el famoso teorema de Pitágoras, que recitábamos diciendo: «La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa». Poniendo el teorema como una ecuación, esta sería $x^2+y^2=z^2$, donde x e y representan las longitudes de los catetos y z la de la hipotenusa. Por lo tanto, encontrar una respuesta positiva a la pregunta de Fermat, es equivalente a encontrar un triángulo rectángulo cuyos lados tengan como longitudes números enteros. Por eso, las soluciones a la cuestión planteada por Fermat para las potencias segundas, se denominan *ternas pitagóricas*. Una de ellas es 3,4,5 ya que $3^2+4^2=9+16=25=5^2$:



Otras son 5,12,13 o 14,48,50 y son bien conocidas familias infinitas de soluciones de diversos tipos.

Pues bien, el último teorema de Fermat asegura que la respuesta es negativa para cualquier otra potencia superior, es decir, que si n es mayor que 2, no existen números enteros no nulos x, y, z tales que $x^n+y^n=z^n$.

A pesar de la sencillez del enunciado, la demostración es extraordinariamente sofisticada. ¿Cuáles han sido las etapas en la demostración?:

Primero se inventan las curvas elípticas y las formas modulares sobre ellas. Se inventan y estudian los esquemas en grupos finitos, las representaciones automorfas, las representaciones de Galois p-ádicas, las álgebras de Hecke, la cohomología de Galois, la teoría de cuerpos de clases local y global. Todo ello supone hacer intervenir técnicas de geometría algebraica y aritmética, análisis armónico, o teoría de Fourier no abeliana. Nada de esto es elemental, está fuera del conocimiento de un graduado medio en matemáticas. Después se demuestran resultados realmente profundos, como variantes de la conjetura de Taniyama-Shimura-Weil[17], usando dichos objetos y técnicas. Finalmente se obtiene un resultado equivalente al último teorema de Fermat.

Todo ello ha llevado unos 350 años y la demostración completa supondrá unas 1000 páginas de matemática de altísimo nivel. Aunque no faltan voluntariosos aficionados que creen equivocadamente haber demostrado el teorema con una idea feliz y manipulaciones de matemática elemental, la realidad es que la diferencia entre esa matemática elemental y la que requiere la demostración es la misma que la diferencia tecnológica que separa un patinete de una sonda espacial, o las señales de humo de un teléfono inteligente.

---

[17] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor: *On the modularity of elliptic curves over* Q*: Wild 3-adic exercises*, Journal of the American Mathematical Society 14 (2001), pp. 843-939.

Matemáticas en nuestro mundo

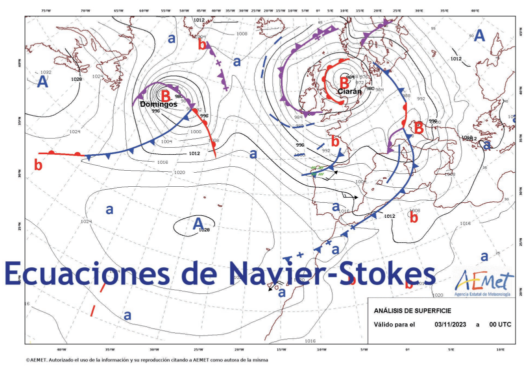
Matemática Pura y matemática aplicada

Durante toda su historia la matemática ha resuelto problemas que le planteaban otras ciencias, tradicionalmente la física. Lo sigue haciendo ahora y es muy sano poner atención a otros aspectos de la vida humana, que proporcionan problemas que se pueden tratar o resolver con matemáticas ya existentes o que estimulan el nacimiento de matemática nueva. Muchos de los desarrollos matemáticos más importantes, como la aparición del cálculo, respondían a necesidades concretas como el cómputo de las órbitas de los planetas. Hasta bien entrado el pasado siglo, las aplicaciones de la matemática eran directas e inmediatas. Por fortuna, los matemáticos jamás se han limitado a proporcionar los resultados necesarios para las aplicaciones; además han estudiado y abstraído conceptos, creando nuevas nociones y objetos, estudiándolos y clasificándolos por curiosidad intelectual, por necesidad de comprender y explicar.

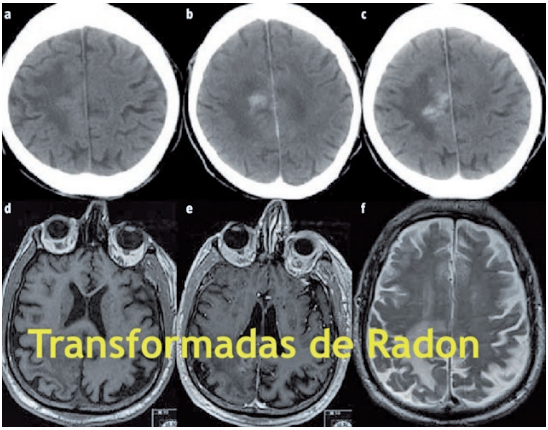
Parece oportuna una consideración sobre el presente de las matemáticas, por cuanto presenta novedades importantes sobre otros momentos de la historia. Una de ellas es la extensión de las aplicaciones de las matemáticas, que ahora es amplísima. Casi no hay campos de las ciencias, la informática, la economía, el arte, la sociología y las relaciones humanas, en los que las matemáticas no tengan una influencia decisiva. Pero, además, en la mayor parte de dichos campos se ha producido una matematización conceptual, que hace que las matemáticas hayan pasado de tener un carácter instrumental, a convertirse en la esencia de sus procesos.

La lista de esos campos es muy larga, me limitaré a recordar algunos de ellos:

- La predicción del tiempo (Navier Stokes)



- Las imágenes por resonancia magnética y tomografía (transformadas de Radon)



- El análisis financiero (cálculo estocástico, teorema de Black-Scholes)

- Internet y los teléfonos inteligentes (teoría de colas, procesos de Poisson, teoría de redes).

- Los códigos de detección y recuperación de errores para dar fiabilidad al almacenaje y transmisión de los datos.

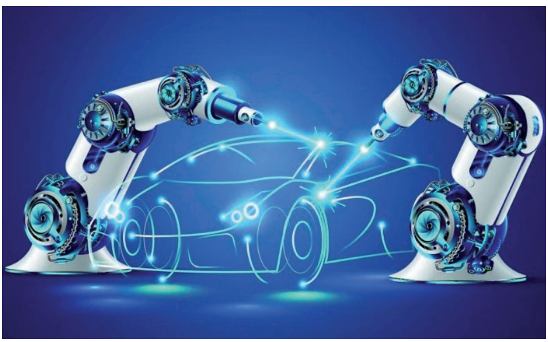
- Las herramientas criptográficas que protegen nuestra información, desde los primeros cifradores básicos utilizados por espartanos, griegos o romanos, pasando por la criptografía moderna nacida con Shannon, la criptografía de clave pública, y más recientemente la criptografía cuántica.

- La transmisión por satélite y los sistemas GPS (métrica Kerr en lugar de la euclídea, para la corrección de los efectos relativistas de la determinación de posición).

- Las neurociencias, que han crecido casi de la nada en los últimos 20 años y hacen uso intensivo de teoría de redes y modelización.

- Los motores de búsqueda (Google representa las páginas web mediante una matriz gigantesca, y usa álgebra lineal, probabilidad y teoría de grafos para proponer las páginas más populares). Ahora utilizan además métodos de Inteligencia Artificial, sobre la que hablaré más adelante.

- La robótica (grupos de Lie)



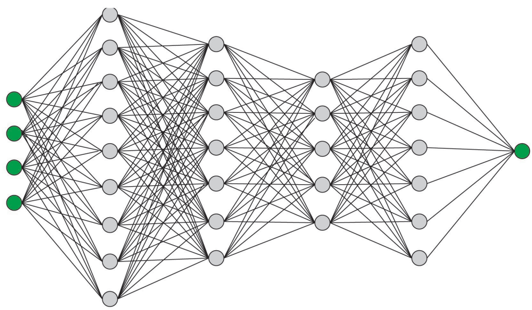
- El control de multitudes o de incendios (modelización dinámica, mecánica de fluidos y simulación).

Matemáticas e Inteligencia Artificial

Las matemáticas de la Inteligencia Artificial

Además de esas aplicaciones, quizá las de mayor influencia en nuestra sociedad actual, sean las referidas a los Datos Masivos (*Big Data*), al aprendizaje de máquinas (*machine learning*) y a la Inteligencia Artificial. Algunas de las aplicaciones de las matemáticas que se han mencionado, se han optimizado mediante estos métodos.

Si bien los primeros resultados significativos en estos campos se produjeron al final del pasado siglo, puede decirse que la explosión de la Inteligencia Artificial empezó alrededor de 2010, con la amplia aplicación de las redes neuronales profundas, que consisten en numerosas capas consecutivas de neuronas artificiales. Las redes neuronales no son sino algoritmos basados en la concatenación de funciones afines que dependen de coeficientes desconocidos (pesos y sesgos), cuya determinación se realiza a partir de datos supervisados mediante lo que se denomina *entrenamiento de la red*.



Representación gráfica de una red neuronal

Se parte así de un conjunto de datos de entrada para los que se sabe cuál debería ser la salida. El entrenamiento se realiza de forma muy sencilla mediante lo que se denomina el *descenso de gradiente*, que se mejora con respecto al error mediante un algoritmo llamado *retropropagación* que disminuye el error poco a poco. Con cálculos paralelos adecuados, se trata de un algoritmo rápido y sencillo.

Hoy en día, este modelo es la herramienta principal de la Inteligencia Artificial, sobre todo de la Inteligencia Artificial generativa.

Inteligencia Artificial Generativa y las matemáticas que usa

La IA generativa se refiere a los modelos de aprendizaje profundo (*deep learning*, en inglés) que pueden tomar datos en bruto, como el contenido de la Wikipedia, y «aprender» a generar resultados estadísticamente probables cuando se les pide. Los modelos generativos codifican una representación simplificada de sus datos de entrenamiento y se basan en ella para crear una nueva obra que es similar, pero no idéntica, a los datos originales. Los modelos generativos se han utilizado durante años en estadística para analizar datos numéricos. Sin embargo, el auge del aprendizaje profundo permitió ampliarlos de modo que pueden generar texto, imágenes y otros contenidos de alta calidad basándose en los datos con los que fueron entrenados. Este entrenamiento requiere de cantidades ingentes de datos, por lo que solo ha sido posible en tiempos recientes cuando se han podido extraer datos del enorme número de dispositivos interconectados, y se tiene, además, una extraordinaria capacidad de cómputo que va en aumento. Los algoritmos de autocorrección y aprendizaje dinámico que permiten el «entrenamiento» de las redes neuronales son herramientas muy útiles en la medicina o en el análisis social y sociológico. Se interviene así en el diseño de campañas sanitarias, en el marketing dirigido y personalizado, en el establecimiento de rankings y valoraciones, en la automatización de procesos de selección de personal y también, y ya hay ejemplos de ello, en campañas políticas y procesos electorales mediante publicidad selectiva y manipulación dirigida. La matemática que está detrás de estos procesos incluye métodos estadísticos, de álgebra lineal y de análisis numérico[18], quizá porque eran los más conocidos para los científicos e ingenieros dedicados a la modelización y al tratamiento masivo de datos.

Uno de los hitos recientes que han contribuido a la explosión de la IA generativa es el uso de Transformadores o *Transformers*, presentado por Google en 2017 en un documento histórico[19] que combinaba la arquitectura codificador-decodificador con un mecanismo de procesamiento de texto llamado «atención» para cambiar la forma en que se entrenaban los modelos

---

[18] G. Kutyniok, *The Mathematics of Artificial Intelligence*, ArXiv: 2023.08890v1.

[19] A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, A.N. Gómez, L. Kaiser and I. Polo, *Attention Is All You Need*, arXiv: 1706.03762.

lingüísticos. En esencia, el uso de transformadores permite procesar frases completas más que palabras; por ejemplo, si se procesa a la vez la frase «el niño está sentado en un banco», el sistema reconoce que «banco», no se refiere a una entidad financiera. De este modo nacieron herramientas como el chatbot de OpenAI, ChatGPT, que impulsado por su enorme modelo lingüístico, puede escribir poemas, contar chistes y redactar ensayos que parecen creados por un ser humano. Es remarcable que ChatGPT haya pasado con éxito el denominado Test de Turing. Este test, también llamado Juego de Imitación o *Imitation Game*, fue ideado por el matemático Alan Turing[20] y es una herramienta de evaluación de la capacidad de una máquina para exhibir un comportamiento inteligente similar al de un ser humano o indistinguible del de

---

[20] A. Turing, *Computing Machinery and Intelligence, Mind,* LIX *(236): 433-460, 1950. doi:10.1093/mind/LIX.236.433, ISSN 0026-4423.*

este. En este caso, se trata de que varias personas establezcan una conversación en lenguaje ordinario con dos interlocutores, sabiendo que uno de ellos es humano y el otro es ChatGPT, pero ignorando quien de ellos es cada uno. Pues bien, los evaluadores no fueron capaces de distinguir quien era el humano y quien la máquina. Así pues, en este sentido ChatGPT tiene un comportamiento indistinguible del de un ser humano. Naturalmente, eso no quiere decir que ChatGPT no cometa errores, lo hace y a veces muy graves, pero de similar forma y apariencia con la que los comete una persona.

Otras herramientas de Inteligencia Artificial requieren de matemáticas menos conocidas y utilizadas que las que sirven de base a los procesos que acabo de referir. Es el caso de la Topología, que, simplificando, es la parte de las matemáticas que estudia las formas y las propiedades que se mantienen cuando se deforma un espacio sin llegar a romperlo. Por ejemplo, una esfera es topológicamente equivalente a un balón de rugby, pues si la imaginamos hecha de un material elástico, podemos deformarla hasta convertirlo en un balón de rugby. Pero no podemos deformarla hasta que sea la superficie de una rosquilla (que en matemáticas se llama un toro), pues la rosquilla tiene un agujero y la esfera no. Así que esfera y toro no son topológicamente equivalentes. Sin embargo, una rosquilla y una taza de café sí que son topológicamente equivalentes, ambas tienen un solo agujero.

Deformación continua de una taza de café en un toro

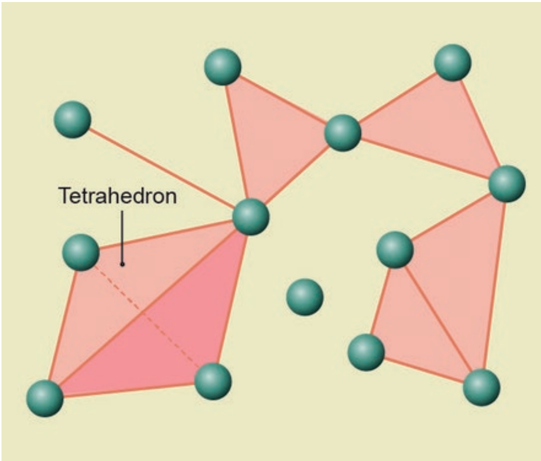
Puesto que las matemáticas son una gran herramienta para encontrar patrones, resultan muy útiles para encontrar formas topológicas inusuales en una amplia nube de datos, datos que pueden representar desde procesos biológicos con ritmos diarios hasta la estructura de moléculas de fármacos. Quizá la más intrigante de las aplicaciones topológicas se refiera a la estructura del cerebro[21]. La topología se ha utilizado para explorar cómo interactúan las neuronas en amplias zonas del cerebro, reaccionando a diferentes entornos y estímulos. Se ha descubierto recientemente que ciertas células cerebrales utilizan un toro (o rosquilla), para cartografiar su entorno.

Para analizar el comportamiento del cerebro se hace una simulación informática

---

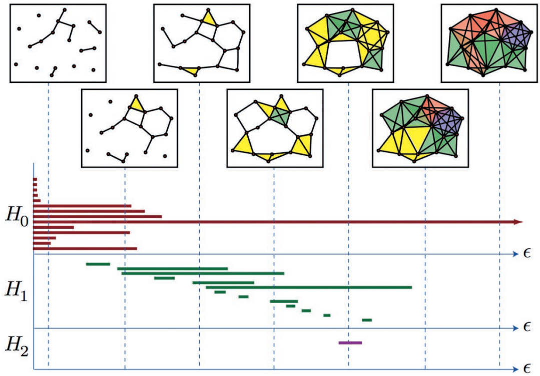
[21] Ver, por ejemplo, K. Houston-Edwards, *How Squishy Math Is Revealing Doughnuts in the Brain*, American Magazine Vol. 327, No. 4 (October 2022), p. 36. DOI:10.1038/scientificamerican1022-36.

masiva de su actividad. Esto es lo que hace el proyecto *Blue Brain*, fundado en 2005 por el *Brain and Mind Institute* de la Escuela Politécnica Federal de Lausana (EPFL). El estudio se ha llevado a cabo en el caso del neocórtex de un roedor, una parte del cerebro implicada en el funcionamiento de orden superior. El modelo informático contiene representaciones de las neuronas individuales, que están conectadas a otras neuronas simuladas mediante sinapsis. Para cada momento de un proceso cerebral, se genera un grafo en el que los vértices corresponden a las neuronas, y los vértices que corresponden a dos neuronas están conectados por una línea si se está disparando una sinapsis que las une; sin embargo, la realidad de la actividad cerebral es más rica, pues existen conexiones entre grupos de más de dos neuronas y esto se puede codificar con un tipo particular de grafos llamados complejos simpliciales, que están formados por triángulos en varias dimensiones.



Complejo Simplicial. Credit: Jen Christiansen

Mediante la técnica denominada Análisis Topológico de Datos, TDA, se estudian la forma o la geometría que subyacen al complejo simplicial, en particular, el número de agujeros en cada dimensión y otros invariantes algebraicos o topológicos asociados, como sus grupos de homología, lo que permite inferir información cualitativa sobre la estructura de los datos estudiados, en este caso, de las conexiones cerebrales. Además, cuando se estudian la variación del complejo simplicial y de sus formas geométricas a lo largo del tiempo que dura un experimento, se observa que ciertas estructuras topológicas o geométricas aparecen, otras desaparecen y algunas se mantienen al ir cambiando los estímulos, y por tanto la configuración de las neuronas conectadas. El estudio de estas variaciones temporales se lleva a cabo mediante una herramienta algebraica y topológica bastante sofisticada llamada Homología Persistente, que se ilustra de forma gráfica con los llamados «códigos de barras», en los que cada barra horizontal representa un «agujero» que persiste en el tiempo. De una cantidad ingente de datos de sinapsis nos quedamos con unos pocos «agujeros dimensionales» que comprimen la información relevante de la actividad cerebral.



Código de barras en Homología Persistente

De este modo, el Análisis Topológico de Datos puede reducir una compleja maraña de datos a una simple lista de agujeros en varias dimensiones que persisten a lo largo del proceso, algo similar al modo en que un archivo fotográfico JPEG comprime una imagen. Como afirma Ghrist[22]:

---

[22] Ver, por ejemplo, R. Ghrist, *Homological Algebra and Data*, in *The Mathematics of Data*, ISA/Park City Mathematics Series, Volume: 25; 2018; 325 pp

> «Es una forma de reducir los datos a lo que realmente importa para obtener algo mucho más viable».

Vemos así como ramas de la matemática más pura y abstracta proporcionan herramientas fundamentales en numerosas aplicaciones y en algunos procesos de Inteligencia Artificial.

Aplicaciones de la Computación y de la Inteligencia Artificial en Matemáticas

La computación y en buena medida la Inteligencia Artificial suponen también, y supondrán aún más en el futuro, un nuevo modo de hacer matemáticas. La potencia de computación de los ordenadores actuales ha permitido avanzar en programas de demostración simbólica de teoremas. Por demostración simbólica se entiende la que se lleva a cabo a partir de una serie de axiomas solo con símbolos lógicos, sin ninguna intervención del lenguaje natural. La idea de la Demostración Automática de Teoremas se remonta a los «Principia Mathematica» de Russel y Whitehead principios de siglo XIX[23] y teoremas como el de los cuatro colores, que asegura que bastan cuatro colores para colorear cualquier mapa de modo que países adyacentes tengan siempre color diferente, o la clasificación completa de los grupos finitos simples, solo han podido llevarse a cabo con el uso de ordenadores. En ambos ejemplos porque la demostración consiste en un gran número de cálculos que deciden cuándo dos casos posibles son o no diferentes. En el caso de la clasificación de los grupos finitos simples, la demostración completa consiste en unas diez mil páginas de programación, imposibles de desarrollar en lo que dura una vida humana. En realidad, ese tipo de demostraciones por fuerza bruta revelan

[23] A. Whitehead and B. Russel, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910. No confundir con el famoso tratado homónimo de I. Newton.

que, aunque se haya probado un teorema, en realidad no se entiende el problema que plantea. Estoy convencido de que, cuando las matemáticas hayan avanzado lo suficiente, cuando se comprenda bien el problema, habrá demostraciones alternativas más esenciales y menos «calculísticas».

Por otra parte, muchos problemas matemáticos de tipo inverso[24], como la eliminación de ruido, o la reconstrucción de imágenes o la resolución de determinadas ecuaciones en derivadas parciales, se abordan ahora de manera mucho más eficiente gracias a la Inteligencia Artificial[25]. Además, la Inteligencia Artificial ayuda a la formación de conjeturas, puesto que puede descubrir patrones y relaciones potenciales entre objetos matemáticos, y utilizar estas observaciones para orientar la intuición y proponer respuestas para

24 Un problema inverso es el busca las causas que ocasionan un efecto conocido.

25 G. Kutyniok, Op. cit.

la comprensión del problema que se esté analizando, permitiendo así establecer una conjetura que después deberá ser demostrada rigurosamente[26].

[26] A. Davies, P. Veličković, L. Buesing, S. Blackwell, D. Zheng, N. Tomašev, R. Tanburn, P. Battaglia, C. Blundell, A. Juhász, M. Lackenby, G. Williamson, D. Hassabis and P. Kohli, *Advancing mathematics by guiding human intuition with AI,* Nature, Vol. 600, 2 December 2021, https://doi.org/10.1038/s41586-021-04086-x.

Conclusiones

Dos reflexiones para terminar: La primera es que la utilidad de las matemáticas hubiera sido mucho menor si se hubiera limitado a resolver las cuestiones que otros campos del saber planteaban. Creando matemáticas en abstracto, sin aplicaciones inmediatas en el momento de su creación, las matemáticas han construido un edificio intelectual tan prodigioso como útil, porque muchas matemáticas que parecen inútiles cuando se hacen, resultan cruciales en las aplicaciones 10, 15, 20 años después de su desarrollo; porque toda matemática que existe, y esto se aplica a cualquier ciencia básica, tendrá en algún momento aplicación.

La segunda es que ha llegado el día en que debemos llamar también matemáticas a actividades del pensamiento distintas a las que han sido su reino a lo largo de la historia. Al fin y al cabo, «mathematica», entendida desde su raíz griega, es simplemente la técnica de aprender.

Para terminar, unas palabras sobre el futuro. Decía Ortega y Gasset que la claridad es la cortesía del filósofo, y también, añado yo, la del matemático. Por eso afirmo que no hay nada más inútil que predecir el futuro. Eso nos lo enseña el pasado, por cuanto las predicciones de hace años sobre lo que tendría que pasar ahora, suelen estar desenfocadas, cuando no son directamente hilarantes. No voy por ello a especular sobre el mañana, voy a terminar afirmando que no sé cuáles serán las matemáticas del futuro; lo que si tengo por cierto es que, sea como sea, el futuro son las matemáticas.

Colofón